

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (1,5 điểm) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 2400 : \{360 : [420 - (4 \cdot 5^3 - 2^3 \cdot 5^2)]\}$

b) $C = \frac{5 \cdot 8^6 \cdot 9^3 - 3^9 \cdot (-16)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^{10} + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Tìm x biết: a) $63 - 3(2 - 3x)^4 = 15$

b) $\frac{x-3}{20} + \frac{x+7}{30} + \frac{x+19}{42} + \frac{x+33}{56} + \frac{x+49}{72} + \frac{x+67}{90} = 306$

2) Tìm chữ số tận cùng của $27^{2024} + 26^{2025}$

Câu 3. (2,5 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $xy - x + y = 8$

2) Tìm số học sinh của trường THCS Bình An biết rằng số học sinh của trường đó nếu xếp thành 17 hàng thì thừa 8 em, nếu xếp thành 25 hàng thì thừa 16 em và số học sinh nhỏ hơn 800.

3) Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Câu 4. (3,0 điểm) 1) Cho đường thẳng xy và điểm O bất kỳ nằm trên đường thẳng đó. Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 3\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm B và C sao cho $OB = 1\text{cm}$; $OC = 5\text{cm}$.

a) Chứng tỏ rằng B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

b) Cho I là trung điểm của OC. Tính độ dài đoạn BI.

c) Lấy điểm M nằm ngoài đường thẳng xy và lấy thêm 2025 điểm phân biệt cùng nằm trên đường thẳng xy sao cho các điểm này không trùng với 5 điểm A, B, C, O, I. Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm trong số các điểm đã cho?

2) Bác An mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Sau khi mở rộng, diện tích ao tăng thêm 600m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Hỏi Bác An phải dùng bao nhiêu chiếc cọc để đủ rào xung quanh ao mới? Biết rằng cọc nọ cách cọc kia 1m và ở một góc ao Bác An để lối lên xuống rộng 2m.

Câu 5. (1,0 điểm) 1. Cho $p > 5$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng $111\dots 11$ chia hết cho p.

2. Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên.

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Đáp án	Điểm
	1. Tính : $A = 2400 : \{360 : [420 - (4.5^3 - 2^3.5^2)]\}$	0,75
Câu 1: (1,5 điểm)	$A = 2400 : \{360 : [420 - (4.5^3 - 2^3.5^2)]\}$ $= 2400 : \{360 : [420 - (4 \cdot 125 - 8 \cdot 25)]\}$ $= 2400 : \{360 : [420 - 300]\}$ $= 2400 : \{360 : 120\}$ $= 2400 : 3 = 800$	0,25 0,25 0,25
	2. $C = \frac{5.8^6.9^3 - 3^9.(-16)^4}{4.2^{13}.3^{10} + 2.8^4.(-27)^3}$	0,75
	$C = \frac{5.2^{18}.3^9 - 3^9.2^{16}}{2^{15}.3^{10} - 2^{13}.3^9}$	0,5
	$C = \frac{2^{16}.3^9.(20-1)}{2^{13}.3^9.(12-1)}$ $C = \frac{2^3.19}{11} = \frac{152}{11}$	0,25 0,25
Câu 2: (2 điểm)	1. Tìm x biết: a) $63 - 3(2 - 3x)^4 = 15$	0,75
	$63 - 3(2 - 3x)^4 = 15$ $3(2 - 3x)^4 = 48$ $(2 - 3x)^4 = 16$	0,25
	TH1: $2 - 3x = 2$ $x = 0$	0,25
	TH2: $2 - 3x = -2$ $x = 4/3$	0,25
	1. b) $\frac{x-3}{20} + \frac{x+7}{30} + \frac{x+19}{42} + \frac{x+33}{56} + \frac{x+49}{72} + \frac{x+67}{90} = 306$	0,75
	$\frac{x-23}{20} + \frac{x-23}{30} + \frac{x-23}{42} + \frac{x-23}{56} + \frac{x-23}{72} + \frac{x-23}{90} = 300$ $(x-23) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} \right) = 300$	0,25
	$(x-23) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = 300$ $(x-23) \cdot \frac{3}{20} = 300$	0,25
	$x - 23 = 2000$ $x = 2023$. Vậy $x = 2023$	0,25

	<p>2) Tìm chữ số tận cùng của $27^{2024} + 26^{2025}$</p> <p>Ta có: $27^{2024} = (27^4)^{506} = (\dots 1)^{506}$ Suy ra 27^{2024} có chữ số tận cùng là 1 Ta có 26^{2025} có chữ số tận cùng là 6 Vậy $27^{2024} + 26^{2025}$ có chữ số tận cùng là 7</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>																				
Câu 3: (2,5 điểm)	<p>1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $xy - x + y = 8$</p>	0,75																				
	$x.(y-1)+(y-1)=7$	0,25																				
	$(x+1).(y-1)=7$ Vì x, y là số nguyên nên x+1 và y -1 cũng là số nguyên, ta có bảng sau :	0,25																				
	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tbody> <tr> <td>x+1</td> <td>- 1</td> <td>1</td> <td>-7</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td>-2</td> <td>0</td> <td>-8</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>y-1</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>-6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>-5</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>	x+1	- 1	1	-7	7	X	-2	0	-8	6	y-1	0	2	-6	8	Y	1	3	-5	9	0,25
	x+1	- 1	1	-7	7																	
	X	-2	0	-8	6																	
	y-1	0	2	-6	8																	
Y	1	3	-5	9																		
Vậy cặp (x,y) là (-2;1); (0;3); (-8;5); (6;9)																						
<p>2) Tìm số học sinh của trường THCS Bình An biết rằng số học sinh của trường đó nếu xếp thành 17 hàng thì thừa 8 em, nếu xếp thành 25 hàng thì thừa 16 em và số học sinh nhỏ hơn 800.</p>	0,75																					
<p>Gọi số học sinh trường là x (học sinh) ($x \in N^*, x < 800$) Theo bài ra, ta có: x chia 17 dư 8 suy ra x + 9 chia hết cho 17 x chia 25 dư 16 suy ra x + 9 chia hết cho 25 Suy ra x + 9 thuộc BC(17, 25)</p>	0,25																					
<p>Tính được BCNN(17, 25) = 425 Suy ra: $x + 9 \in B(425) = (0; 425; 850, \dots)$ $x \in (416; 841; \dots)$</p>	0,25																					
<p>Mà x nhỏ hơn 800 nên x = 416 Vậy số Học sinh trường A là 416 học sinh</p>	0,25																					
<p>3) Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.</p>	0,5																					

	<p>Trong ba số nguyên $2^n - 1$; 2^n; $2^n + 1$ có một số chia hết cho 3.</p> <p>Mặt khác, 2^n không chia hết cho 3, do đó một trong hai số $2^n - 1$; $2^n + 1$ phải có một số chia hết cho 3, nghĩa là một trong hai số này phải có một hợp số.</p> <p>Theo bài ra $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$); do đó $2^n + 1$ là hợp số.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
Câu 4. (3,0 điểm)	<p>1) Cho đường thẳng xy và điểm O bất kỳ nằm trên đường thẳng đó. Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 3\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm B và C sao cho $OB = 1\text{cm}$; $OC = 5\text{cm}$.</p> <p>a) Chứng tỏ rằng B là trung điểm của đoạn thẳng AC.</p> <p>b) Cho I là trung điểm của OC. Tính độ dài đoạn BI.</p> <p>c) Lấy điểm M nằm ngoài đường thẳng xy và lấy thêm 2025 điểm phân biệt cùng nằm trên đường thẳng xy sao cho các điểm này không trùng với 5 điểm A, B, C, O, I. Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm trong số các điểm đã cho?</p>	<p>2</p>
		<p>0,25</p>
	a) Chứng tỏ rằng B là trung điểm của đoạn thẳng AC.	0,75
	<p>Ta có B nằm giữa O và C</p> <p>Nên: $OB + BC = OC$ $1 + BC = 5$ $BC = 5 - 1$</p> <p>Vậy $BC = 4$ (cm)</p>	<p>0,25</p>
	<p>Ta có: $AO + OB = AB$ $3 + 1 = AB$ $AB = 4$ (cm)</p> <p>Vì B nằm giữa A và C và $AB = BC$ ($= 4\text{cm}$)</p> <p>Nên B là trung điểm của đoạn BC</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
	b) Tính độ dài BI	0,5
	Vì I là trung điểm của đoạn OC nên $OI = \frac{OC}{2} = 2,5(\text{cm})$	0,25
	Vì B nằm giữa O và I nên ta có: $OB + BI = OI$	

	$1 + BI = 2,5$ $BI = 1,5 \text{ (cm)}$	0,25
	c) Lấy điểm M nằm ngoài đường thẳng xy và lấy thêm 2025 điểm phân biệt cùng nằm trên đường thẳng xy sao cho các điểm này không trùng với 5 điểm A, B, C, O, I. Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm trong số các điểm đã cho?	0,5
	Trên đường thẳng xy có tất cả: $5 + 2025 = 2030$ điểm phân biệt Tính cả điểm M ta có tất cả 2031 điểm phân biệt. Từ một điểm bất kì kể đến 2030 điểm còn lại ta được 2030 đoạn thẳng phân biệt. Vậy có tất cả số đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm trong số các điểm đã cho là: $\frac{2031 \cdot 2030}{2} = 2061465$ (đoạn thẳng)	0,25 0,25
	2) Bác An mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng. Sau khi mở rộng diện tích ao tăng thêm 600 m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần diện tích ao cũ. Hỏi phải dùng bao nhiêu cây để trồng xung quanh ao biết cây nọ cách cây kia 1 m.	1
	Ta có hình vẽ: <div style="text-align: center;"> </div> <p>Ta có sơ đồ sau:</p> <p>Diện tích ao cũ: </p> <p>Diện tích ao mới: </p> <p>Diện tích ao mới là:</p> $600 : (4 - 1) \times 4 = 800 \text{ (m}^2\text{)}$ <p>Ta chia ao mới thành hai hình vuông có diện tích bằng nhau như hình vẽ. Diện tích một hình vuông là:</p> $800 : 2 = 400 \text{ (m}^2\text{)}$ <p>Vì $400 = 20 \times 20$</p> <p>Cạnh của hình vuông hay chiều rộng của ao mới là 20m</p> <p>Chiều dài của ao mới là: $20 \times 2 = 40 \text{ (m)}$</p> <p>Chu vi ao mới là:</p> $(40 + 20) \times 2 = 120 \text{ (m)}$	0,25 0,25 0,25

	Số cọc để rào xung quanh ao mới khi đã để lối lên xuống rộng 2m là: (120 – 2) : 1 + 1 = 119 (chiếc)	0,25
Câu 5. (1,0 điểm)	1) Cho $p > 5$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng $111\dots 11$ chia hết cho p.	0,5
	<p>Ta xét dãy số $1; 11; 111; \dots; \underbrace{111\dots 1}_p$.</p> <p>Nếu dãy số trên không có số nào chia hết cho p thì ta cho tương ứng mỗi số với số dư của phép chia.</p> <p>Tập hợp các số dư chỉ có $1; 2; 3; \dots; p-1$ gồm $p-1$ phần tử (vì 0 không thể có trong tập hợp này).</p> <p>Nhưng vì chúng có p số ở dạng trên nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư.</p> <p>Giả sử các số đó là: $\underbrace{111\dots 1}_m$ và $\underbrace{111\dots 1}_n$ với $m > n$.</p> <p>Khi đó $1 \leq n < m \leq p$.</p> <p>Như vậy: $\underbrace{111\dots 1}_m - \underbrace{111\dots 1}_n = \underbrace{111\dots 1}_{m-n} \underbrace{000\dots 0}_n = \underbrace{111\dots 1}_{m-n} \cdot 10^n$</p> <p>Tích này chia hết cho p vì $(p, 10) = 1$ suy ra $\underbrace{111\dots 1}_{m-n}$ chia hết cho p và nó cũng nằm trong dãy trên.</p> <p>Mà $1 \leq n < m \leq p$ mâu thuẫn với giả thiết không có số nào trong dãy chia hết cho p.</p>	0,25
	2. Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên	0,5
	$A = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$ $A = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{2023^2}$ $A = 2022 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} \right)$	0,25
	<p>Ta có $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2022.2023} = 1 - \frac{1}{2023} < 1$</p> <p>Do vậy $2021 < A < 2022$ nên giá trị của A không phải là một số tự nhiên</p>	0,25

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 6**
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-6>