

Câu 1. (4,0 điểm) Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{2025}{2024} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2024} + \frac{1}{3}$

b) $B = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1000^2) \cdot (91 - 273 : 3)$

c) $C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$

d) $D = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Tìm số tự nhiên x biết : $(2x + 1)^2 = 25$.

b) Tìm chữ số x, y sao cho: $\overline{1x8y2}$ chia hết cho 36.

c) Chứng minh rằng $M = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024} : 217$.

d) Tìm các số nguyên x, y sao cho : $xy - 2x - y = -6$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Một cửa hàng bán hết một thùng dầu trong ba ngày. Ngày đầu tiên bán được $\frac{1}{3}$ thùng dầu. Ngày thứ hai bán được $\frac{3}{5}$ số dầu còn lại trong thùng. Ngày thứ ba bán nốt 80 lít dầu còn lại trong thùng. Hỏi lúc đầu số dầu trong thùng là bao nhiêu?

b) Tìm số nguyên tố p để $p + 6; p + 8; p + 12; p + 14$ đều là các số nguyên tố.

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Vẽ đoạn thẳng $AB = 5cm$. Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $MN = 1cm$. Tính $AM + BN$.

b) Cho 200 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng. Hỏi ta có thể vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng phân biệt đi qua 2 trong số 200 điểm trên?

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Người ta chia số học sinh lớp 6A thành các tổ, nếu mỗi tổ 9 em thì thừa một em, còn nếu mỗi tổ 10 em thì thiếu 3 em. Hỏi lớp 6A có bao nhiêu tổ, bao nhiêu học sinh?

b) Trong mặt phẳng cho 2025 điểm sao cho cứ 3 điểm bất kì có ít nhất 2 điểm cách nhau một khoảng không vượt quá 1. Chứng minh rằng: tồn tại một hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1013 điểm.

----- Hết -----

Bài 1: (2điểm)


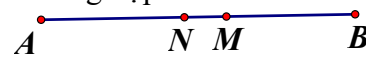
Ý	Đáp án	Điểm											
<p>Câu 1 (4,0 điểm). Thực hiện phép tính:</p> $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{2025}{2024} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2024} + \frac{1}{3}$ $B = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1000^2) \cdot (91 - 273 : 3)$ $C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$ $D = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$													
A	$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{2025}{2024} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2024} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2025}{2024} - \frac{1}{2024} \right) + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$	1,0 đ											
B	$B = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1000^2) \cdot (91 - 273 : 3) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1000^2) \cdot (91 - 91)$ $= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1000^2) \cdot 0 = 0$	1,0 đ											
C	$C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^{10} \cdot (13 + 65)}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^2 \cdot 78}{104} = 3$	1,0 đ											
D	$D = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90} = - \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} \right)$ $= - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) = \frac{-3}{20}$	1,0 đ											
<p>Câu 2 (6,0 điểm)</p> <p>a) Tìm số tự nhiên x biết : $(2x + 1)^2 = 25$</p> <p>b) Tìm chữ số x,y sao cho: $1x8y2$ chia hết cho 36.</p> <p>c) Chứng minh rằng $M = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024} : 217$</p> <p>d) Tìm các số nguyên x, y sao cho : $xy - 2x - y = -6$</p>													
a	$(2x + 1)^2 = 25$ $(2x + 1)^3 = 5^2 = (-5)^2$	0,5 đ											
	<p>Trường hợp 1: $2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ (t/m x là số tự nhiên, chọn)</p>	0,5 đ											
	<p>Trường hợp 2: $2x + 1 = -5 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$ (không t/m x là số tự nhiên, loại)</p> <p>Vậy $x = 2$</p>	0,5 đ											
b	<p>Đề số $1x8y2 : 36$ ($0 \leq x, y \leq 9, x, y \in \mathbb{N}$)</p> $\Rightarrow \begin{cases} (1 + x + 8 + y + 2) : 9 \\ y2 : 4 \end{cases}$	0,25 đ											
	$y2 : 4 \Rightarrow y = \{1; 3; 5; 7; 9\} (1)$	0,25 đ											
	<p>$(x+y+2) : 9 \Rightarrow x+y = 7$ hoặc $x+y = 16$</p> <p>*, Với $x + y = 7$, nên từ (1) ta có bảng sau:</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>9</td> </tr> </table> <p>Mà $0 \leq x, y \leq 9, x, y \in \mathbb{N}$ nên $(x;y) \in \{(6;1), (4;3), (2;5), (0;7)\}$ (chọn)</p> <p>*, Với $x + y = 16$, nên từ (1) ta có bảng sau:</p>	x	6	4	2	0	-2	y	1	3	5	7	9
x	6	4	2	0	-2								
y	1	3	5	7	9								

	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>15</td> <td>13</td> <td>11</td> <td>9</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>9</td> </tr> </table>	x	15	13	11	9	7	y	1	3	5	7	9																	
x	15	13	11	9	7																									
y	1	3	5	7	9																									
	Mà $0 \leq x, y \leq 9, x, y \in \mathbb{N}$ nên $(x;y) \in \{(9;7), (7;9)\}$ (chọn)	0,5 đ																												
	Vậy các cặp $(x; y)$ cần tìm là : $(6;1), (4;3), (2;5), (0;7), (9;7), (7;9)$																													
	Ta có $M = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024} : 217$, ta thấy tổng M có 2025 số hạng và 2025 chia hết cho 3 và cho 5 nên:																													
	$M = (1 + 2 + 2^2) + (2^3 + 2^4 + 2^5) + \dots + (2^{2022} + 2^{2023} + 2^{2024})$ $M = (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{2022}(1 + 2 + 2^2)$ $M = 7 + 2^3 \cdot 7 + \dots + 2^{2022} \cdot 7$	0,5 đ																												
c	$M = 7 \cdot (1 + 2^3 + 2^6 + \dots + 2^{2022}) : 7$																													
	$M = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (2^{2020} + 2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023} + 2^{2024})$ $M = 31 + 31 \cdot 2^5 + 31 \cdot 2^{10} + \dots + 31 \cdot 2^{2020}$ $M = 31 \cdot (1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{2020}) : 31$	0,5 đ																												
	Vì $(7, 31) = 1$ nên $M : 217$	0,5 đ																												
	$xy - x - y = -6 \Rightarrow (x - 1)(y - 2) = -4 \quad (x, y \in \mathbb{Z}) \quad (1)$																													
	Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1, y - 2 \in \mathbb{Z} \quad (2)$																													
	Từ (1); (2) $\Rightarrow -4$ chia hết cho $x - 1$ nên $x - 1$ là các ước nguyên của -4																													
	$\Rightarrow x - 1 \in \{-1; 1; -2; 2; -4; 4\} \quad (3)$																													
	Từ (1) và (3) ta có bảng sau:																													
d	<table border="1"> <tr> <td>x-1</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>-2</td> <td>2</td> <td>-4</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>y-2</td> <td>4</td> <td>-4</td> <td>2</td> <td>-2</td> <td>1</td> <td>-1</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>-1</td> <td>3</td> <td>-3</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>6</td> <td>-2</td> <td>4</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> </table>	x-1	-1	1	-2	2	-4	4	y-2	4	-4	2	-2	1	-1	X	0	2	-1	3	-3	5	y	6	-2	4	0	3	1	0,75 đ
x-1	-1	1	-2	2	-4	4																								
y-2	4	-4	2	-2	1	-1																								
X	0	2	-1	3	-3	5																								
y	6	-2	4	0	3	1																								
	Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn đầu bài là $(x; y) = (0; 6), (2; -2), (-1; 4), (3; 0), (-3; 3), (5; 1)$	0,25 đ																												
Câu 3 (4,0 điểm)																														
a) Một cửa hàng bán hết một thùng dầu trong ba ngày. Ngày đầu tiên bán được $\frac{1}{3}$ thùng dầu. Ngày thứ hai bán được $\frac{3}{5}$ số dầu còn lại trong thùng. Ngày thứ ba bán nốt 80 lít dầu còn lại trong thùng. Hỏi lúc đầu số dầu trong thùng là bao nhiêu?																														
b) Tìm số nguyên tố p để $p + 6; p + 8; p + 12; p + 14$ đều là các số nguyên tố.																														
	Số dầu còn lại sau ngày thứ nhất bán là:	0,5 đ																												
	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (thùng dầu)																													
	Ngày thứ hai bán được số phần là:	0,5 đ																												
	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$ (thùng dầu)																													
a	Ngày thứ ba bán được số phần là:	0,5 đ																												
	$1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ (thùng dầu)																													
	Lúc đầu số dầu trong thùng là:	0,5 đ																												
	$80 : \frac{4}{15} = 80 \cdot \frac{15}{4} = 300$ (lít dầu).																													
	Vậy lúc đầu số dầu trong thùng là 300 lít																													

	Xét phép chia của p cho 5 ta thấy p có 1 trong 5 dạng sau $p = 5k, p = 5k + 1, p = 5k + 2, p = 5k + 3, p = 5k + 4 (k \in N)$	0,5 đ
	+Nếu $p = 5k$ và p nguyên tố nên $p = 5$ khi đó $p + 6 = 11; p + 8 = 13; p + 12 = 17; p + 14 = 19$ đều là số nguyên tố	0,5 đ
b	+Nếu $p = 5k + 1 \Rightarrow p + 14 = 5(k + 3):5$ và $p + 14 > 5$ nên là hợp số (loại)	0,75 đ
	+Nếu $p = 5k + 2 \Rightarrow p + 8 = 5(k + 2):5, p + 8 > 5$ nên là hợp số (loại)	
	+Nếu $p = 5k + 3 \Rightarrow p + 12 = 5(k + 3):5, p + 12 > 5$ nên là hợp số (loại)	
	+nếu $p = 5k + 4 \Rightarrow p + 6 = 5(k + 2):5, p + 6 > 5$ nên là hợp số (loại)	
	Vậy $p = 5$ là số nguyên tố cần tìm.	0,25 đ

Câu 4 (4,0 điểm)

- a) Vẽ đoạn thẳng $AB = 5cm$. Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $MN = 1cm$. Tính $AM + BN$?
- b) Cho 200 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng. Hỏi ta có thể vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng phân biệt đi qua 2 trong số 200 điểm trên?

a	Trường hợp 1:  M nằm giữa hai điểm $A, N : AM + MN = AN \Rightarrow AM = AN - MN$	0,5 đ
	N nằm giữa hai điểm A, B nên $AN + NB = AB \Rightarrow BN = AB - AN$ $\Rightarrow AM + BN = AB - AN + AN - MN = AB - MN = 5 - 1 = 4cm$	0,5 đ
	Trường hợp 2  N nằm giữa A, M : $AN + NM = AM$ hay $AM = AN + MN$	0,5 đ
	N nằm giữa hai điểm A, B nên: $AN + NB = AB \Rightarrow BN = AB - AN$ $\Rightarrow AM + BN = AB - AN + AN + MN = AB + MN = 5 + 1 = 6cm$ Vậy Nếu M nằm giữa A, N thì $AM+BN=4cm$ Nếu N nằm giữa A,M thì $AM+BN=6cm$	0,5 đ
	*. Xét 200 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng +, Lấy 1 điểm trong 200 điểm trên nối với 199 điểm còn lại ta được 199 đường thẳng. +, Cứ làm như vậy với 200 điểm thì số đường thẳng thu được là 199.200 đường thẳng. +, Nhưng làm như vậy, mỗi đường thẳng sẽ được tính 2 lần, do đó số đường qua 2 điểm trong 200 điểm (trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng) là: $200.199 : 2 = 19900$ (đường thẳng) (1)	0,75 đ
	*. Tương tự: Số đường thẳng đi qua 2 điểm trong 5 điểm (trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng) là : $5.4 : 2 = 10$ (đường thẳng) Nhưng qua 2 điểm trong 5 điểm thẳng hàng ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng. Do đó số đường thẳng bị giảm đi do có 5 điểm thẳng hàng là : $10 - 1 = 9$ (đường thẳng) (2)	0,75 đ
	*. Từ (1) và (2) => Số đường thẳng cần tìm là: $19900 - 9 = 19891$ (đường thẳng)	0,5 đ

Câu 5 (2,0 điểm)

- a) Người ta chia số học sinh lớp 6A thành các tổ, nếu mỗi tổ 9 em thì thừa một em, còn nếu mỗi tổ 10 em thì thiếu 3 em. Hỏi lớp 6A có bao nhiêu tổ, bao nhiêu học sinh?
- b) Trong mặt phẳng cho 2025 điểm sao cho cứ 3 điểm bất kì có ít nhất 2 điểm cách nhau một khoảng không vượt quá 1. Chứng minh rằng : tồn tại một hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1013 điểm.

a	Giả sử có thêm 4 học sinh nữa thì khi chia mỗi tổ 10 em thì cũng còn thừa 1 em như khi chia mỗi tổ 9 em. Vậy cách chia sau hơn cách chia trước 4 học sinh. Mỗi tổ 10 học sinh hơn mỗi tổ 9 học sinh là: $10 - 9 = 1$ (học sinh)	1,0 đ
---	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

	Do đó số tổ là: $4 : 1 = 4$ (tổ) Số học sinh là: $4 \cdot 10 - 3 = 37$ (học sinh)	
b	Lấy một điểm A bất kì trong 2025 điểm đã cho, vẽ hình tròn C_1 tâm A bán kính bằng 1. + Nếu tất cả các điểm đều nằm trong hình tròn C_1 thì hiển nhiên có đpcm. + Nếu tồn tại một điểm B mà khoảng cách giữa A và B lớn hơn 1 thì ta vẽ đường tròn C_2 tâm B bán kính bằng 1. Khi đó, xét một điểm C bất kì trong số 2023 điểm còn lại. Xét 3 điểm A, B, C, vì $AB > 1$ nên theo giả thiết ta có $AC \leq 1$ hoặc $BC \leq 1$. Nói cách khác, điểm C phải thuộc C_1 hoặc C_2 . \Rightarrow 2023 điểm khác B và A phải nằm trong C_1 hoặc C_2 . Theo nguyên lí Đê-rích-lê ta có một hình tròn chứa ít nhất 1012 điểm. Tính thêm tâm của hình tròn này thì hình tròn này chính là hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1013 điểm trong 2025 điểm đã cho.	1,0 đ

*****, Lưu ý: Nếu học sinh giải cách khác, chính xác vẫn cho điểm tối đa.

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 6**
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-6>