HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ TOÁN CHUYÊN LỚP 10/2025 – PTNK TP HCM

Võ Quốc Bá Cẩn

Bài 1 (2.0 *điểm*). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$, với m là một tham số thực.

a) Chứng minh rằng với mọi số thực m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b) Chứng minh rằng $x_1^4 + x_2^4 > \frac{9}{2}$.

c) Chứng minh rằng $\left(x_1 + \sqrt{x_1^2+1}\right)\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+1}\right) = 1$ khi và chỉ khi $m = -1$.

Hướng dẫn giải. **a)** Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - 2m = m^2 + 1 > 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Áp dụng định lý Vieta, ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ và $x_1x_2 = 2m$. Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m+1)^2 - 4m = 4(m^2+m+1).$$

Từ đây, ta suy ra

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 16(m^2+m+1)^2 - 8m^2.$$

Nếu $m^2 \le \frac{1}{2}$, thì ta có

$$16(m^2+m+1)^2 - 8m^2 = \left[(2m+1)^2+3\right]^2 - 8m^2 \ge 9 - 8m^2 \ge 9 - 4 = 5 > \frac{9}{2}.$$

Còn nếu $m^2 > \frac{1}{2}$, thì ta có

$$16(m^2+m+1)^2 - 8m^2 = 4\left[m^2+1+(m+1)^2\right]^2 - 8m^2 \ge 4(m^2+1)^2 - 8m^2 = 4m^4 + 4 > 5 > \frac{9}{2}.$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta đều có $16(m^2+m+1)^2 - 8m^2 > \frac{9}{2}$. Vậy $x_1^4 + x_2^4 > \frac{9}{2}$.

c) Chú ý rằng $\left(\sqrt{x_1^2+1} + x_1\right)\left(\sqrt{x_1^2+1} - x_1\right) = \left(\sqrt{x_2^2+1} + x_2\right)\left(\sqrt{x_2^2+1} - x_2\right) = 1$. Do đó, nếu $\left(x_1 + \sqrt{x_1^2+1}\right)\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+1}\right) = 1$ thì

$$x_2 + \sqrt{x_2^2+1} = \sqrt{x_1^2+1} - x_1, \quad x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = \sqrt{x_2^2+1} - x_2.$$

Cộng hai đẳng thức này lại, ta được $x_1 + x_2 = 0$. Ngược lại, rõ ràng nếu $x_1 + x_2 = 0$ thì $\left(x_1 + \sqrt{x_1^2+1}\right)\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+1}\right) = 1$. Như vậy, ta có $\left(x_1 + \sqrt{x_1^2+1}\right)\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+1}\right) = 1$ khi và chỉ khi $x_1 + x_2 = 0$. Mà $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ nên điều này đồng nghĩa với ta phải có $m = -1$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 2 (1.5 *điểm*). Người ta muốn ghi bốn số thực ở bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ (mỗi đỉnh một số) thỏa mãn:

- Bốn số được ghi là đôi một phân biệt;
- Tổng hai số được ghi ở hai đầu của cạnh AB là 0;
- Tổng hai số được ghi ở hai đầu của ba cạnh còn lại là ba giá trị phân biệt 1, 2 và 3.

a) Hãy chỉ ra một cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên.

b) Trong các cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên, tìm cách ghi có tổng bình phương của các số ở bốn đỉnh là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải. a) Xét cách ghi số ở bốn đỉnh A, B, C, D lần lượt là 2, -2, 3, 0. Khi đó tổng tất cả các số được ghi trên hai đầu của các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là 0, 1, 3, 2. Do đó, cách ghi số này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b) Gọi bốn số được ghi ở bốn đỉnh A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d. Theo giả thiết, ta có $a+b=0$ và $b+c$, $c+d$, $d+a$ là một hoán vị của 1, 2, 3. Do đó

$$1+2+3=(b+c)+(c+d)+(d+a)=(a+b)+2(c+d)=2(c+d),$$

tức $c+d=3$. Suy ra $b+c$, $d+a$ là hoán vị của 1, 2. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $b+c=1$ và $d+a=2$. Khi đó, ta có $c=1-b=1+a$ và $d=2-a$. Suy ra

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a^2+(-a)^2+(1+a)^2+(2-a)^2=4a^2-2a+5=\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\geq\frac{19}{4}.$$

Mặt khác, với $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$, $c=\frac{5}{4}$, $d=\frac{7}{4}$ thì các yêu cầu của bài toán được thỏa mãn và $a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{19}{4}$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2+d^2$ là $\frac{19}{4}$. □

Bài 3 (2.0 *điểm*). Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn m^2+m+n^2 chia hết cho mn. (1)

a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa mãn (1) khi $n=3$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n thỏa mãn (1), biết rằng m chia hết cho n.

c) Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương m và n. Chứng minh rằng, nếu hai số nguyên dương m, n thỏa mãn (1), thì $m=d^2$.

Hướng dẫn giải. a) Giả sử tồn tại số nguyên dương m, n thỏa mãn yêu cầu khi $n=3$. Khi đó, ta có m^2+m+3 chia hết cho $3m$, suy ra 3 chia hết cho m, tức $m\in\{1,\ 3\}$. Tuy nhiên, khi thử lại, ta đều thấy không thỏa mãn. Mâu thuẫn nhận được cho ta kết quả cần chứng minh.

b) Đặt $m=kn$ với k nguyên dương. Khi đó, từ (1), ta có $k^2n^2+kn+n^2$ chia hết cho kn^2, hay k^2n+k+n chia hết cho kn. Suy ra $k+n$ chia hết cho kn. Từ đó $k+n\geq kn$, hay $(k-1)(n-1)\leq 1$. Mà $(k-1)(n-1)\geq 0$ nên $(k-1)(n-1)\in\{0,\ 1\}$.

Nếu $(k-1)(n-1)=1$, thì $k=n=2$, hay $m=4$, $n=2$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Nếu $(k-1)(n-1)=0$, thì $k=1$ hoặc $n=1$.

- Với $k=1$, do $k+n$ chia hết cho kn nên $n+1$ chia hết cho n. Từ đó 1 chia hết cho n, tức $n=1$.
- Chứng minh tương tự, với $n=1$ thì ta cũng có $k=1$.

Tóm lại, trong trường hợp này, ta có $k = n = 1$, hay $m = n = 1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy, các cặp số (m, n) cần tìm là $(1, 1)$ và $(4, 2)$.

c) Đặt $m = dx$, $n = dy$ với x, y nguyên dương và $(x, y) = 1$. Từ (1), ta có $d^2x^2 + dx + d^2y^2$ chia hết cho d^2xy, hay $dx^2 + dy^2 + x$ chia hết cho dxy. Từ đây, ta suy ra x chia hết cho d và dy^2 chia hết cho d.

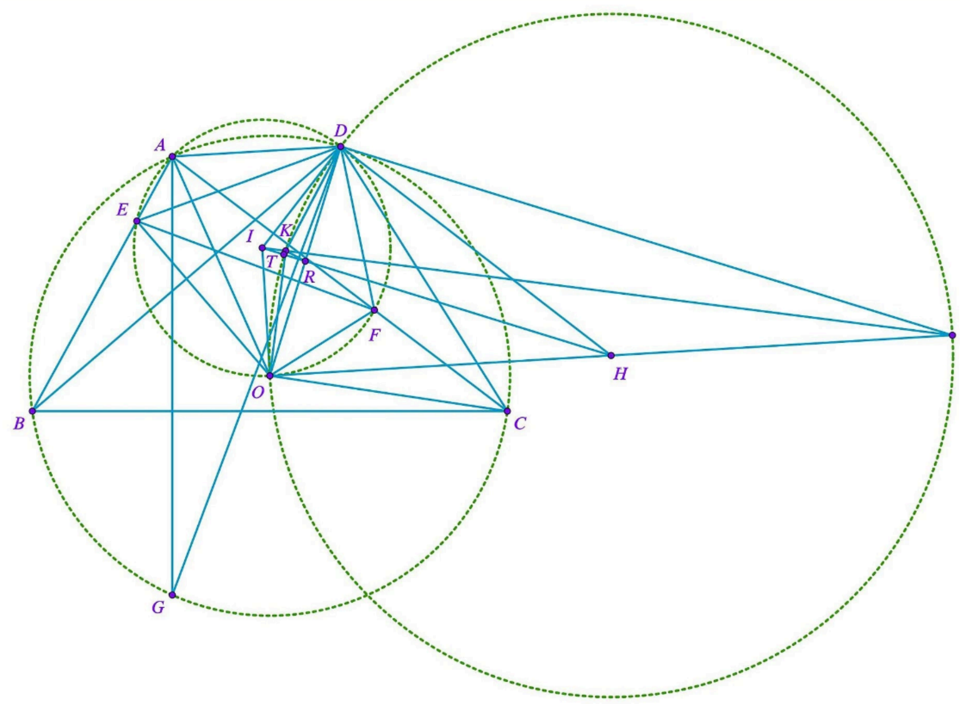
Do dy^2 chia hết cho x và $(x, y) = 1$ nên d chia hết cho x. Mà x chia hết cho d nên $x = d$. Suy ra $m = dx = d^2$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 4 (3.0 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), có $\angle A > \angle B > \angle C$. Lấy điểm D trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) sao cho $CD > AB$. Đường trung trực của đoạn thẳng DB cắt đường thẳng AB tại điểm E; đường trung trực của đoạn thẳng DC cắt đường thẳng AC tại điểm F.

a) Chứng minh rằng các điểm A, D, E, F thuộc một đường tròn và đường tròn này đi qua tâm O của đường tròn (O).

b) Chứng minh rằng tam giác DBE và tam giác DCF đồng dạng, đồng thời đường cao qua đỉnh D của tam giác DEF và đường cao qua đỉnh A của tam giác ABC cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O).

c) Ký hiệu (I) là đường tròn tâm I, đi qua các điểm A, D, E, F. Tiếp tuyến của đường tròn (I) tại điểm O cắt tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm D ở điểm S. Gọi R là trung điểm của đoạn thẳng OD và K là giao điểm thứ hai của đường thẳng SI với đường tròn ngoại tiếp tam giác SDO $(K \neq S)$. Chứng minh $\angle RKD = 90°$ và đường thẳng DK đi qua trung điểm của đoạn thẳng IR.



Hướng dẫn giải. **a)** Dễ thấy tam giác BED cân tại đỉnh E. Vì thế

$$\angle AOD = 2\angle EBD = 180^\circ - \angle BED = \angle AED.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\angle AOD = \angle AFD$. Do đó $\angle AOD = \angle AED = \angle AFD$. Từ đây, ta suy ra năm điểm A, E, F, D, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Hai tam giác DBE và DCF đều là hai tam giác cân (tương ứng cân tại E và F), đồng thời thỏa mãn $\angle EBD = \angle FCD$ nên chúng đồng dạng với nhau (g-g).

Bây giờ, gọi G là giao điểm thứ hai của đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC và đường tròn (O). Ta có $\angle GDB = \angle GAB = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = \angle OAF = \angle OEF$. Mà $OE \perp BD$ nên $DG \perp EF$. Như vậy, đường thẳng DG chứa đường cao kẻ từ đỉnh D của tam giác DEF. Ta có điều phải chứng minh.

c) Dễ thấy tam giác ODS vuông tại đỉnh D. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng OS thì H là tâm của đường tròn (SDO). Tiếp theo, với chú ý $IO = ID$ và $HO = HD$, ta suy ra đường thẳng IH là đường trung trực của đoạn thẳng OD. Nói riêng, đường thẳng IH đi qua điểm R.

Dễ thấy hai tam giác IDH và IOH bằng nhau (c-c-c) nên tam giác IDH cũng là tam giác vuông. Nói riêng, đường thẳng ID là tiếp tuyến của đường tròn (SDO).

Với chú ý rằng $\angle OKS = 90^\circ$ và $\angle IRO = 90^\circ$, ta chứng minh được tứ giác $IKRO$ nội tiếp. Suy ra $\angle OKR = \angle OIR$ và $\angle KOD = KIR$. Mặt khác, ta cũng có

$$\angle KDO = \angle KSO = \angle IOK = \angle KRI.$$

Từ đây, dễ thấy hai tam giác KRI và KDO đồng dạng (g-g). Suy ra $\angle DKO = \angle RKI$. Như vậy

$$\angle DKR = \angle DKO - \angle OKR = \angle RKI - \angle OIR = 180^\circ - \angle IOR - \angle OIR = 90^\circ.$$

Bây giờ, gọi T là giao điểm của đường thẳng DK và đường thẳng RI. Ta có

$$\angle TIK = \angle KIR = \angle KOR = \angle IDT.$$

Từ đây, dễ thấy hai tam giác TIK và TDI đồng dạng (g-g). Suy ra $\frac{TI}{TK} = \frac{TD}{TI}$, hay $TI^2 = TK \cdot TD$.

Dễ thấy hai tam giác vuông KTR và RTD đồng dạng (g-g). Suy ra $\frac{TK}{TR} = \frac{TR}{TD}$, hay $TR^2 = TK \cdot TD$. Kết hợp với kết quả trên, ta được $TI = TR$, hay T là trung điểm của đoạn thẳng IR. □

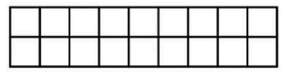
Bài 5 (1.5 *điểm*). Cho bảng ô vuông kích thước 2×9 và số nguyên dương $k \le 18$. Hai ô của bảng được gọi là *kề bên* nếu chúng có một cạnh chung. Hai bạn An và Bình chơi trò "Truy Tìm Tàu Ngầm" như sau: Trước khi trò chơi bắt đầu, An chọn một ô trên bảng và không cho Bình biết. Ở mỗi lượt chơi:

- An phải chọn một ô mới, kề bên với ô đã chọn trước đó, và không cho Bình biết;
- Sau khi An chọn xong, Bình chọn k ô của bảng và hỏi An: trong k ô này có ô An vừa chọn hay không? Nếu có thì Bình thắng, nếu không thì hai bạn lại chơi lượt tiếp theo.

a) Xét $k = 4$, chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 8 lượt chơi.

b) Xét $k = 2$, chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 16 lượt chơi.

Hướng dẫn giải. Để cho tiện, ta đánh số các hàng từ trên xuống dưới là 1, 2 và các cột từ trái sang phải là 1, 2, …, 9. Ký hiệu ô $(i,\ j)$ là ô vuông ở hàng thứ i và cột thứ j.



a) Ta sẽ chỉ ra chiến thuật để Bình có thể thắng sau không quá 8 lượt chơi. Ở lượt thứ i với $1 \leq i \leq 8$, Bình sẽ chọn bảng bốn ô vuông ở bảng con 2×2 giới hạn bởi cột thứ i và cột thứ $i + 1$.

Sau lượt thứ nhất, nếu không có ô vuông An vừa chọn thì ô vuông đó sẽ thuộc cột thứ ba trở đi. Lúc đó, ô vuông tiếp theo An chọn sẽ thuộc cột thứ hai (An có thể chọn ô này nếu ô An chọn trước đó ở cột thứ ba) hoặc thuộc phạm vi từ cột thứ ba trở đi.

Sau lượt thứ hai, nếu không có ô vuông An vừa chọn thì ô vuông đó sẽ thuộc cột thứ tư trở đi. Lúc đó, ô vuông tiếp theo An chọn sẽ thuộc cột thứ ba (An có thể chọn ô này nếu ô An chọn trước đó ở cột thứ tư) hoặc thuộc phạm vi từ cột thứ tư trở đi.

Cứ tiếp tục như vậy, có thể thấy rằng chắc chắn sau không quá 8 lượt thì Bình sẽ thắng.

b) Ta sẽ chỉ ra chiến thuật để Bình có thể thắng sau không quá 16 lượt chơi. Ở lượt thứ i với $1 \leq i \leq 8$, Bình sẽ chọn hai ô vuông $(1,\ i)$ và $(2,\ i+1)$; còn ở lượt thứ i với $9 \leq i \leq 16$, Bình sẽ chọn hai ô vuông $(2,\ i-8)$ và $(1,\ i-7)$.

Gọi $(x_1,\ y_1)$ là ô mà An chọn ở lượt đầu tiên. Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: *$x_1 + y_1$ chẵn.* Ta sẽ chứng minh An thua sau không quá 8 lượt đầu chọn ô của Bình. Giả sử không phải như vậy.

Nếu $(x_1,\ y_1) \in \{(1,\ 1),\ (2,\ 2)\}$ thì Bình thắng ở ngay lượt đầu tiên. Do đó $(x_1,\ y_1) \notin \{(1,\ 1),\ (2,\ 2)\}$.

Giả sử $(x_1,\ y_1) = (1,\ 3)$. Nếu ở lượt tiếp theo An chọn ô $(1,\ 1)$ hoặc $(2,\ 3)$ thì Bình sẽ thắng ở lượt thứ hai, mâu thuẫn. Do đó, An chọn ô $(1,\ 4)$ ở lượt thứ hai của mình. Sau khi Bình chơi lượt thứ hai, có thể thấy ô tiếp theo An chọn không thể là ô $(1,\ 3)$ hoặc ô $(2,\ 4)$, nếu không thì Bình sẽ thắng ở lượt thứ ba, mâu thuẫn. Do đó, An sẽ chọn ô $(1,\ 5)$ lượt tiếp theo của mình. Cứ tiếp tục như vậy, ta thấy An chỉ có thể "nhích" sang phải mỗi lần mà thôi. Đến lượt thứ bảy, ô An chọn sẽ là ô $(1,\ 9)$. Thế thì sau khi Bình chơi lượt thứ bảy thì An sẽ phải chọn một trong hai ô $(1,\ 8)$ hoặc $(2,\ 9)$ và Bình sẽ thắng ở lượt thứ tám, mâu thuẫn. Do đó $(x_1,\ y_1) \neq (1,\ 3)$.

Sau khi Bình chơi hai lượt thì An sẽ chọn một ô $(x_2,\ y_2)$ nào đó mà $x_2 + y_2$ chẵn, lúc này ta có thể coi như trò chơi được bắt đầu lại từ đầu với bảng 2×7 và ô An chọn có tọa độ mới là $(x_2,\ y_2 - 2)$ trong bảng mới này. Tính chất của tọa độ mới không thay đổi.

Sau khi Bình chơi hai lượt tiếp theo, trò chơi sẽ đưa về xét với bảng 2×5. Rồi sau khi Bình chơi hai lượt tiếp theo, trò chơi sẽ đưa về xét với bản 2×3. Lúc này, trong bảng 2×3 mới này, nếu ô An chọn là ô $(1,\ 1)$ hoặc $(2,\ 2)$ thì Bình sẽ thắng ngay sau đó (tương ứng với lượt thứ bảy tính từ lúc đầu), mâu thuẫn. Do đó, ô An chọn là ô $(1,\ 3)$, nhưng lúc này ô tiếp theo An chọn sẽ là ô $(1,\ 2)$ hoặc $(2,\ 3)$ và Bình sẽ thắng lượt thứ hai kể từ lúc chơi với bảng 2×3 (tương ứng với lượt thứ tám tính từ lúc đầu), mâu thuẫn. Từ mâu thuẫn nhận được chứng tỏ Bình sẽ thắng sau không quá 8 lượt chơi đầu.

Trường hợp 2: *$x_1 + y_1$ lẻ.* Nếu sau 8 lượt đầu mà không thắng, Bình có thể suy luận được rằng ô An chọn lúc đầu thỏa mãn $x_1 + y_1$ lẻ, và sau 8 lượt thì ô An chọn sẽ là ô $(x_2,\ y_2)$ cũng thỏa mãn $x_2 + y_2$ lẻ. Lúc này, bằng cách chơi như chiến thuật đã nêu và chứng minh tương tự, có thể thấy Bình sẽ thắng sau không quá 8 lượt nữa. □

Trên đây chỉ là hướng dẫn giải vắn tắt, học sinh cần trình bày chi tiết các lập luận cũng như chứng minh lại các kết quả ngoài sách giáo khoa khi sử dụng.